7.4　隐函数求导法

7.4.1 一个方程的情形

7.4.2 方程组的情形

7.4.3 反函数的偏导数

7.4.4 二元函数的参数表示法及偏导数

7.4 隐函数求导法

$x^2+y^2=1\ (y>0)$ 确定隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$

两边对x求导，注意 y是关于x的函数

$$2x+2y\cdot y'=0$$

$$y'=-\frac{x}{y}$$

$x^2+y^2=0$确定函数 $x=0, y=0$ 不可导

$e^{xy}+2=0$ 不能确定隐函数

7.4.1 一个方程的情形

1. $F(x, y) = 0$

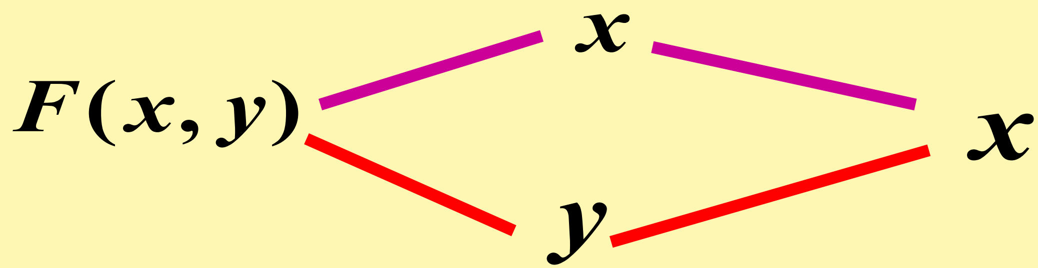
定理 7.4.1 隐函数存在定理 1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0) = 0$，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$，则方程 $F(x,y) = 0$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$，它满足条件 $y_0 = f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

隐函数的求导公式

$$F(x,y)=0 \longleftrightarrow y=f(x)$$

$$\frac{d[F(x,y)]}{dx}$$



$$=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$$

由于F_y连续，且$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在(x_0,y_0)的一个邻域，在这邻域内$F_y\neq 0$，得
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

例 1 验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个可导、且$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值.

解 令 $F(x,y)=x^2+y^2-1$

则 $F_x=2x$, $F_y=2y$, 具有连续的偏导数,

$$F(0,1)=0, \quad F_y(0,1)=2\neq 0,$$

依定理知方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且$x=0$时$y=1$的函数$y=f(x)$.

$$F(x,y)=x^2+y^2-1$$

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,$$

点(0,1)处

函数的一阶和二阶导数为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y},\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y}+x\cdot\frac{y'}{y^2}=-\frac{y-x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{1}{y^3},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-1.$$

例2 已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解法一 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$,

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x},$$

则 $F_x(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y(x,y)=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{y-x}.$$

注意： 在函数$z=F(x,y)$中，x和y都是自变量

求函数$z=F(x,y)$对x的偏导时，把y看成常量

例2 已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解法二

在$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$两边对$x$求导,

$$\frac{1}{2}\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}=\frac{\dfrac{xy'-y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}},\quad\Rightarrow y'=-\frac{x+y}{y-x}.$$

注意：方程$F(x,y)=0$两端对x求导时，

y是因变量，x是自变量，y是关于x的函数

不要漏了y'

2. $F(x,y,z)=0$

定理 7.4.2 隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，

并有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

注：改定理中的 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 为 $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

可确定函数 $x=f(y,z)$,且 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_x},\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{F_z}{F_x}$

2. $F(x,y,z)=0$

定理 7. 4. 2 隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，

并有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

注 对于$F(x_1,x_2,\cdots x_n,z)=0$所确立的$z=z(x_1,x_2,\cdots x_n)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_z}\qquad i=1,2,\cdots n.$$

例 3 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z,$

则 $F_x=2x,\quad F_z=2z-4,\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{x}{2-z},$

解法二：在$x^2+y^2+z^2-4z=0$两边对x求偏导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\cdot\dfrac{x}{2-z}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

例 4 设$z = f(x+y+z,\ xyz)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

思路： 把z看成x, y的函数对x求偏导数得$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

把x看成z, y的函数对y求偏导数得$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，

解法一 令 $u = x + y + z,\quad v = xyz,$

则 $z = f(u, v),$

把z看成x, y的函数对x求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + f_v \cdot \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

例 4 设 $z = f(x+y+z,\ xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

$$u = x + y + z, \quad v = xyz,$$

整理得 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_u + yzf_v}{1 - f_u - xyf_v},$$

把 x 看成 z, y 的函数对 y 求偏导数 $x = x(y,\ z)$

$$0 = f_u \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right) + f_v \cdot \left(xz + yz\frac{\partial x}{\partial y}\right),$$

整理得 $$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_u + xzf_v}{f_u + yzf_v}$$

例 4 设 $z = f(x+y+z,\ xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$.

$$u = x + y + z, \qquad v = xyz,$$

解法二 令 $F(x,y,z) = z - f(x+y+z,\ xyz)$

$$F_x = 0 - \left(f_u \cdot 1 + f_v \cdot yz\right) \quad F_y = 0 - \left(f_u \cdot 1 + f_v \cdot xz\right)$$

$$F_z = 1 - \left(f_u \cdot 1 + f_v \cdot xy\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{f_u + yzf_v}{1 - f_u - xyf_v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{f_u + xzf_v}{f_u + yzf_v}$$

在 $F(x,y,z)$ 中，

x, y, z 都是自变量

已知$F(x,y,z)=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

解法一：方程法

方程$F(x,y,z)=0$两边对x求偏导，x和y都是自变量，z是因变量，确定函数$z=f(x,y)$

解法二：公式法

引进新的函数$u=F(x,y,z)$，x,y,z都是自变量，

求F_x时把y,z视为常量，求F_z时把x,y视为常量

求出F_x和F_z代入公式

解法三：全微分形式的不变性 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

求两个以上偏导时建议用公式法

7.4.2 方程组的情形 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

定理 7. 4. 3 隐函数存在定理 3 设$F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且

$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,

偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于零，

则方程组

$$F(x,y,u,v)=0、\qquad G(x,y,u,v)=0$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},$$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

方程组两边对 x 求偏导：

$$\begin{cases} F_x + F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -F_x \\ G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -G_x \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}.$$

例 5 设 $xu-yv=0$， $yu+xv=1$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解： 运用公式推导的方法，

将所给方程的两边对 x求导并移项

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases},\quad J=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2,$$

例 5 设 $xu - yv = 0$，$yu + xv = 1$.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = -u \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = -v \end{cases}, \quad J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

在 $J \neq 0$ 的条件下，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2},$$

例 5 设 $xu - yv = 0$， $yu + xv = 1$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

将所给方程的两边对 y 求导，用同样方法得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

注　特别地：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在一定条件下

确定了$y=y(x), z=z(x)$,要求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$

一般：方程个数＝因变量个数

变量个数－方程个数=自变量个数

条件: (1) F,G连同它们的一切偏导在(x_0,y_0,z_0)的邻域内连续

（2）$F(x_0,y_0,z_0)=0, G(x_0,y_0,z_0)=0$

$$(3)\ J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$$

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

两边对x求导:
$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{dy}{dx} + F_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ G_x + G_y \dfrac{dy}{dx} + G_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

从中解出 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$

例6 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$

解 运用公式推导的方法，

将所给方程的两边对 x 求导

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-x}{x-y}.$$

7.4.3 多元函数的反函数

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \xrightarrow{?} \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

设函数$x=x(u，v)$，$y=y(u，v)$在点（u，v）的某一邻域内连续且具有连续偏导数，又

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

7.4.4 二元函数的参数表示法及偏导数

一元函数的参数方程: $\begin{cases} x = x(t) \Rightarrow t = t^{-1}(x) \\ y = y(t) \end{cases}$

$\therefore\ y = y(t),\ t = t^{-1}(x)$

二元函数的参数方程:

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \\ z = z(u,v) \end{cases}\right.$$

$\therefore z = z(u,v)$ 其中 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} \text{求} \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$z = z(u,v)$$

其中 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

方法 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

从 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 两边对 x, y 求偏导,可以求出

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

例7 $z=uv, x=u+\frac{1}{v}, y=v+\frac{1}{u}$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 在$x=u+\frac{1}{v}, y=v+\frac{1}{u}$两边对$x$求偏导:

注意: $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$

$$\begin{cases} 1=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u^2v^2}{u^2v^2-1} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v^2}{u^2v^2-1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{uv^2}{uv-1}$$

熟练掌握隐函数的偏导数的计算

（1）单个方程的情形

理论基础是复合函数的求导法则，具体计算有三种方法:

(i) 公式法；　　(ii)复合函数的求导法则；

(iii) 一阶全微分形式的不变性

（2）方程组的情形

一般：方程个数=因变量个数=函数个数

求导方法：确定自变量及因变量，各方程对某一个自变量求偏导，解方程组求得各因变量对这个自变量的偏导数(或导数) .